Exercice 11 :

Soit a un complexe non nul.

On pose $a = [r, \theta]$. $0 \le \theta \le 2\pi$

Déterminer suivant les différentes valeurs de θ la forme trigonométrique des complexes : $b = a + i\,\bar{a}$ et $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{a}$

Exercice 12 :

1°/ Montrer que : $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

2°/ Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{n\alpha}{2}}$.

3°/En déduire $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\alpha k)$ et $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\alpha k)$

Exercice 13 :

1°/ Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$

2°/ En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \text{cotg}(\frac{\pi}{2n})$

3°/ Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$. Prouver que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

Exercice 14 :

1°/ On pose $Z = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}$ où $0 < \alpha < \pi$ et $0 < \beta < \pi$

Prouver que Z est un nombre imaginaire pur.

2°/ on pose $W = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$ où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Prouver que $W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\,\text{tg}(\frac{\theta}{2})$